Annals of Mathematics and Philosophy
Online version, 4/03/2024

$M \times \Phi$

Lautman, critique mathématique

Fernando Zalamea

Abstract. We offer a new perspective on Lautman's work, envisioning him as a "mathematical critic" rather than a so-called "philosopher of mathematics". We propose a distinction between Philosophy and Criticism, and, building on a study of Lautman's sources and mathematical studies, we situate the main bulk of his work in the realm of Mathematical Criticism.

Keywords. Lautman, Hilbert, Herbrand, philosophy, criticism.

§ 0. — Introduction.

L'analyse et la synthèse méritent toujours d'être pensées en contrepoint. Dans le cas d'Albert Lautman (1908-1944) il est intéressant d'*analyser* (disjoindre) ses travaux du point de vue d'une « critique mathématique » similaire aux critiques littéraire, artistique, musicale, avant de *synthétiser* (conjoindre) cette approche avec les vues plus traditionnelles de la « philosophie mathématique ». La *Section 1* offre une courte discussion des contrastes entre « Philosophie des Mathématiques » et « Critique des Mathématiques ». La *Section 2* parcourt les sources de Lautman, sous des aspects tant quantitatifs que qualitatifs ; l'on y découvre sa forte attention à la mathématique, au détriment de la philosophie. La *Section 3* regarde Lautman comme critique des Maîtres mathématiques centraux de la période 1830-1930 : Galois, Riemann, Poincaré, Hilbert. La *Section 4* retrace les références de Lautman à ses contemporains, en particulier à l'œuvre de Jacques Herbrand. Finalement, la *Section 5* étudie les connexions du « Lautman critique », souligné dans les sections précédentes, avec le plus connu « Lautman philosophe ».

§ 1. — Philosophie disjointe de la Critique.

Nous considérons la mathématique comme une *pensée*, c'est-à-dire un « mixte » [197] [(1)] entre techniques et idées [(2)]. Cette pensée peut être regardée de plusieurs points de vue, selon que l'on réponde, de diverses façons, aux adverbes simples *QQOQCCP* (quoi, qui, où, quand, comment, combien, pourquoi). Un mathématicien sera particulièrement sensible aux quoi-comment-combien ; un historien des mathématiques le sera aux qui-où-quand ; un philosophe classique le sera aux quoi-comment-pourquoi ; un philosophe analytique le sera aux quoi-comment [(3)]. En revanche, un *critique mathématique*, si un tel être existe [(4)], devra être attentif à *toutes* les modalités quoi-qui-où-quand-comment-combien-pourquoi, et devra réaliser une (*dé*)*construction de la pensée mathématique sur tous les registres possibles de la création* [(5)].

La philosophie analytique des « mathématiques » a *réduit* ses questions à la philosophie de la logique et de la théorie des ensembles, et s'est concentrée sur des versions aplaties du quoi (nombre) et du comment (raisonnement déductif). Avec cette réduction et cette concentration, les philosophes analytiques ont construit un discours précis et autoréférentiel, linguistiquement et logiquement puissant mais mathématiquement vide. L'éloignement des mathématiques vivantes et complexes (espace-forme-structure, autour de la géométrie, la topologie, l'algèbre abstraite, la variable complexe, la théorie analytique et algébrique

(1) Les références du type [page] envoient à l'édition Vrin des « Œuvres » de Lautman [Lautman 2006]. Les références du type [nom année, page] envoient à la bibliographie, signalée à la fin de l'article.

(2) Comme il est bien connu, la notion de « mixte » provient de Lautman. Zalamea a étendu cette conception lautmanienne grâce à la notion de *faisceau* : la mathématique comporte (au moins) un espace « plié » de techniques (définitions, axiomes, preuves, exemples) et un espace « déplié » d'idées (images, concepts, intuitions) qui se « mixent » et projettent sur les techniques. *Cf.* [Zalamea 2021a].

(3) Bien sûr, ces simples disjonctions essaient seulement de donner une *orientation large* pour des *communautés* de savants. Au-delà de toute analyse disjonctive, il pourra exister des cas particuliers d'historiens des mathématiques qui couvrent amplement le registre *QQOQCCP* (comme le cas exemplaire de Jeremy Gray), ou de philosophes des mathématiques qui le parcourent aussi (comme Gilles Châtelet).

(4) Pour une étude de la situation, *cf.* l'article de Zalamea dans le premier numéro des *Annals of Mathematics and Philosophy*, [Zalamea 2021b].

(5) Dans cette perspective, et allant plus loin des classifications usuelles, nous pourrions dire de Gray et de Châtelet qu'ils sont des *critiques mathématiques* au sens le plus accompli.

des nombres, l'analyse fonctionnelle, les équations différentielles, etc.) a été complet. Avec cela, non seulement les spectres historiques (qui-où-quand) et métaphysiques (pourquoi) des mathématiques ont disparu, mais les objets (quoi) et les méthodes (comment) ont été singulièrement appauvris. Peut-être cet aplatissement était-il nécessaire pour essayer d'obtenir une (illusoire) précision du langage, mais le fait est que cette approche philosophique a laissé de côté les forces essentielles de la création mathématique (6).

Le labeur du *critique mathématique* doit aller explicitement à l'encontre de toute tentative réductrice, et approfondir la *multidimensionalité* des perspectives et des interprétations. Dans ce sens, une *saine disjonction* avec le philosophe doit être opérée (avant de tenter une conjonction postérieure, voir *Section 5* plus bas). Le critique doit, avant tout, (A) *savoir regarder* les œuvres mathématiques. De même qu'un critique littéraire qui veut étudier Proust, par exemple, se doit d'avoir lu directement *À la Recherche*, un critique mathématique qui veut étudier Riemann, par exemple, se doit d'avoir lu directement sa *Thèse Doctorale*. Le retour aux sources, aux œuvres, est une condition *sine qua non* pour le critique, condition souvent importante pour l'historien, mais souvent négligée par le philosophe. Le quoi-qui-où-quand devient vraiment central pour le critique : il ne peut pas se restreindre à une littérature secondaire, éloignée des œuvres, et développer des discours linguistiques abstraits, éloignés des structures mathématiques. Ensuite, ayant été confronté aux objets et processus complexes de la création mathématique, le critique doit (B) *décrire avec précision* les idées centrales et les techniques associées des œuvres soumises à son analyse (pensée mathématique comme « faisceau », réponses au comment-combien). Finalement, le critique doit pouvoir (C) *expliquer les grandes forces* (pourquoi) qui soutiennent la création mathématique. Dans ce sens, il va au-delà même du mathématicien, comme le critique littéraire va au-delà de l'écrivain, ou le critique artistique va au-delà de l'artiste.

Ainsi, grâce à une *pleine immersion dans le QQOQCCP*, le critique (mathématique, littéraire, artistique, musical) approchera réellement la discipline étudiée (mathématique, littérature, art, musique). Son travail sera plus *synthétique*, nécessairement plus

(6) Les analyses de la créativité mathématique par l'école française — [Poincaré 1908], [Hadamard 1943], [Grothendieck 1985-86] — restent encore aujourd'hui fondamentales.

vaste puisqu'il devra faire face à un spectre plus ample de perspectives. Il sera donc le complément de travaux *analytiques* nécessairement plus bornés. Le *va-et-vient* entre analyse et synthèse, entre localité et globalité (7), entre langage et vision, présentera beaucoup d'avantages pour une compréhension plus fidèle des mathématiques.

§ 2. — Les sources de Lautman.

Le point (A) signalé en haut — savoir regarder les œuvres — est impératif pour le critique mathématique. Le *travail sur le travail* mathématique est un de ses labeurs fondamentaux (8). La connaissance mathématique de Lautman a été toujours appréciée (9), et il est facile de regarder en détail (*i*) ses études préparatoires et ses lectures (étude des *sources*), et (*ii*) leur usage (étude des *références*). Les sources de Lautman sont multiples et complexes (10). D'un côté, ses sources mathématiques en appellent à des *traités* aujourd'hui considérés comme *classiques* : logique mathématique (Hilbert & Ackermann 1928, Hilbert & Bernays 1939), théorie des nombres (Hecke 1923, Hurwitz & Courant 1925, Ingham 1932, Herbrand 1936), algèbre abstraite (van der Waerden 1931, Glivenko 1938), équations différentielles (Bieberbach 1923, Kähler 1934), variable complexe (Picard 1896, Osgood 1907, Weyl 1913, Montel 1927, Nevanlinna 1936), analyse fonctionnelle (Fréchet 1928), topologie (Lefschetz 1930, Seifert & Threlfall 1934, Alexandrov & Hopf 1935), physique (Weyl 1928, Broglie 1932, Hilbert & Courant 1937, Julia 1938). Les *dates* sont remarquables : excepté trois traités

(7) C'est un des thèmes récurrents de l'œuvre de Lautman, *cf.* [Lautman 2010].

(8) Simone Weil a toujours défendu l'importance cruciale du *travail* dans l'expérience humaine, *cf.* [Labbé 2018]. Pour des vues sur *l'œil mathématicien* de Simone, *cf.* [Lafforgue 2014], [Zalamea 2022].

(9) Selon la phrase bien connue de Dieudonné, « au contact de ses camarades et amis Jacques Herbrand et Claude Chevalley (deux des esprits les plus originaux du siècle), (Lautman) avait acquis sur les mathématiques des années 1920-1930 des vues bien plus étendues et précises que n'en avaient la plupart des mathématiciens de sa génération, souvent étroitement spécialisés ; j'en puis en témoigner en ce qui me concerne personnellement » [35]. Curieusement, cette extension de vues lui est reprochée par Yvon Gauthier : « sa culture mathématique en menait large, trop large peut-être pour ne pas demeurer superficielle dans bien des cas » [Marquis 2010, 159]. Il n'y a pas de raison pour cette réprimande : extension, précision et profondeur vont de la main dans l'œuvre de Lautman.

(10) Pour une étude exhaustive, voir ma « Noticia sobre las fuentes de Lautman », *cf.* [Lautman 2011, 543-558].

sur la variable complexe, *tous* les autres ont été publiés dans les années 1920-1930, soulignées comme cruciales par Dieudonné. D'un autre côté, Lautman est très attentif à des *articles de recherche* de son époque : Hilbert 1923, Cartan 1924, Gödel 1930 & 1931, Herbrand 1931, Pontriagin 1931, Hopf 1932, Tarski 1935, Birkhoff & von Neumann 1936, Gentzen 1936, Weil 1938. Lautman assiste aussi au *Séminaire de Mathématiques* de l'Institut Henri Poincaré et profite de brillants exposés de Possel 1934-35, von Neumann 1934-35, Weil 1934-35, Cartan 1937. Les thèses doctorales de ses amis Jacques Herbrand (1930) et Claude Chevalley (1934) sont reprises dans ses travaux. Des références aux *Mathematische Annalen* et à *L'Enseignement Mathématique* montrent son désir d'être bien informé des travaux mathématiques en cours.

Du point de vue (*ii*) de l'usage des sources, il serait peut-être approprié de décrire l'œuvre de Lautman comme un commentaire soutenu, tant analytique que synthétique, des profonds travaux de Hilbert. Hilbert est cité 25 fois comme source et mentionné dans 47 pages du corps de l'œuvre de Lautman [11], tant autour de ses travaux en analyse fonctionnelle, qu'en théorie des nombres et logique, où l'influence de Herbrand aura été décisive. Du point de vue quantitatif, l'attention vers Hilbert est ainsi très soutenue, mais cette attention est aussi bien fondamentale qualitativement : l'espace de Hilbert est pour Lautman l'exemple *sine qua non* de mixte, entre continu et discret, local et global, fini et infini. Le second mathématicien le plus cité est Riemann (1 référence comme source, 38 pages de mentions). Les autres auteurs le plus étudiés sont Élie Cartan (27 pages), Henri Poincaré (25 pages) et Hermann Weyl (23 pages), dont l'importance peut avoir été signalée à Lautman par Ehresmann, qui a étudié avec Weyl (1932-1934) et a réalisé sa thèse sous Cartan (1934). Ainsi, sous l'égide Riemann-Hilbert-Weyl, contraposée à l'école française Galois-Poincaré-Cartan, nous voyons comment se constitue l'énorme culture mathématique de Lautman, et comment il se dirige vers une sorte de *structuralisme mixte*, très proche à l'essor des mathématiques des années 1920-1930, qui deviendra la vraie marque de son approche philosophique.

En effet, loin d'un « platonisme » ingénu, qui aura orienté bien pauvrement la réception des travaux de Lautman, c'est sur une

(11) Les comptages de sources et références renvoient ici à l'édition espagnole des « Œuvres » de Lautman [Lautman 2011], plus complète que les éditions françaises (Hermann, PUF, Vrin).

combinaison complexe de structuralisme global et de mixtes locaux — préfiguration de la théorie des faisceaux, très claire dès son « Rapport Bouglé » (1935), *cf.* [Lautman 2010] — que repose sa vision originale des mathématiques. Chez Lautman, comme chez Cavaillès, une mathématique effective (locale) et une réflexion conceptuelle (globale) vont la main dans la main, et ce sont justement les structures en évolution qui permettent les passages entre le concret et l'abstrait. Il suffit de regarder (*i*) ses sources et (*ii*) ses usages philosophiques, pour se rendre compte que Lautman peut être beaucoup mieux compris comme *critique mathématique* que comme philosophe mathématique. Dans la liste suivante, à côté de chaque philosophe, le premier numéro signale le nombre de références comme source et le second numéro indique le nombre de pages où l'auteur est étudié : Platon (7/10), Descartes (3/3), Leibniz (3/6), Kant (3/9), Carnap (8/17), Wittgenstein (1/6), Heidegger (6/13), si nous parcourons les philosophes les plus cités. Le *mythe* du « Lautman platoniste » inventé par la littérature secondaire se détruit donc immédiatement si on regarde de près ses écrits. Non seulement ses perspectives philosophiques sont *multiples*, loin d'être centralement platoniciennes, mais elles sont bien *moindres*, tant en quantité comme en qualité, comparées avec ses mentions mathématiques.

§ 3. — La critique des Maîtres.

La tâche (B) pour le critique mathématique signalée dans la *Section 1* — décrire avec précision techniques et idées — concentre le meilleur de Lautman. Sa vision du « mouvement propre d'une théorie mathématique » [66], de la « genèse de théories mathématiques effectives » [237], acquiert une grande exactitude dans ses écrits. Lautman s'occupe d'un énorme spectre de constructions mathématiques, comme le montre une courte liste (12) des savants qu'il étudie : Bernays, de Broglie, Cartan (Elie), Dirichlet, Einstein, Euler, Galois, Gödel, Herbrand, Hilbert, Hopf, Klein, Lebesgue, von Neumann, Pfaff, Poincaré, Riemann, Schrödinger, Weierstrass, Weyl. En particulier, l'on trouve des magnifiques descriptions des techniques et idées majeures introduites par les Maîtres de

(12) Cette liste inclût, en ordre alphabétique, les mathématiciens (et physiciens) mentionnés *sur sept pages au moins* dans son œuvre (référence aux apparitions dans l'édition espagnole complète [Lautman 2011]).

la mathématique moderne dans la période 1830-1930 : Galois, Riemann, Poincaré, Hilbert.

L'œuvre de Galois est approchée comme exemple de « montée vers l'absolu » [165]. Selon Lautman, « l'intérêt du schéma logique de la théorie de Galois est considérable » [167], exprimant le saut « d'un domaine de base imparfait » à « l'existence d'une extension où cette imperfection ait disparu » [167–168]. L'association de divers nombres et mesures à chaque étape de la montée entre deux corps répond alors à un *achèvement structurel* fondamental pour la vision lautmanienne : les mathématiques effectives incarnent un mouvement de *mixtes intermédiaires abstraits* (13) qui donne à la discipline sa raison d'être la plus profonde. Si les extensions de corps et ses groupes de Galois s'avèrent très utiles pour saisir les *variations et invariances* de la pensée mathématique, les transformations méromorphes et les théorèmes de représentation de Riemann autour de ses surfaces multiples deviennent pour Lautman l'exemple parfait pour dévoiler les richesses dynamiques de la mathématique moderne. En effet, l'étude de l'uniformisation des surfaces de Riemann dans la Thèse Principale de Lautman [174–178] est un véritable chef d'œuvre d'exposition et de compréhension. Le jeune « philosophe » devient à ce moment un formidable *critique*, lorsqu'il explique comment « il s'agit encore d'éliminer les imperfections de certains êtres mathématiques par passage de ce qu'ils sont primitivement à un idéal de simplicité absolue dont l'existence est impliquée dans les enchevêtrements même de leur structure » [174]. *L'existence par décomposition et recomposition de la structure* (point (C) synthétique, explicatif du labeur critique) émerge comme résultat de longues et précises analyses préalables de la mathématique effective (point (B) de son labeur descriptif). L'analyse des multiformités, ramifications, recouvrements des fonctions de variable complexe, exemplifié autour des fonctions algébriques et des racines n-ièmes [175], est lié aux caractéristiques topologiques des surfaces de Riemann associées [176], avant d'arriver aux théorèmes de représentation conforme (Riemann, Poincaré, Hilbert, Koebe) d'une surface de Riemann simplement connexe « soit sur la totalité de la sphère complexe, soit sur cette sphère à laquelle on enlève un point, soit sur le cercle unité du plan complexe » [177]. Ébloui « par l'immensité des horizons nouveaux » [177], le critique

(13) « Étude des modes d'organisation possible d'éléments de nature indifférente », *cf.* [Lautman 2011, 378].

Lautman réussit sa triple tâche d'*ouverture de l'intelligence mathématique* : (A) regarder, (B) décrire, (C) expliquer des tournants majeurs de la pensée.

Lautman étudie — regarde, décrit, explique — plusieurs aspects centraux de l'œuvre de Poincaré : les théorèmes de dualité en topologie algébrique [160–163], les méthodes topologiques en équations différentielles [215–218], les métriques hyperboliques et le théorème d'uniformisation des surfaces de Riemann [101–102]. En plus de constantes références aux liens entre topologie et algèbre inventés par Poincaré, Lautman note l'intérêt des théorématiques particulières pour comprendre des problématiques générales : les « propriétés de structure interne » opposées (et conjointes) avec les « propriétés extrinsèques de situation » [163], les « conditions d'existence des points fixes » qui dépendent tant de la « structure du domaine de base » que de la « nature de la transformation interne » [217], « le primat de la synthèse géométrique sur celui de l'analyse «numérique» » [105]. On voit ici le critique dans toute sa force technique, capable de dévoiler des vastes panoramas à partir d'études serrées d'œuvres mathématiques.

Autour de Hilbert, Lautman souligne ses contributions aux formes infinitaires et équations fonctionnelles [93–95], la métamathématique et la théorie de la démonstration [129–131], la théorie des corps de classes [168–169], l'infini et l'opérateur logique de contre-exemple universel τ [180–181], l'espace de Hilbert [200–207], le problème de Dirichlet [213–214], la mécanique quantique [286]. Ainsi, Lautman parcourt le vaste spectre des mathématiques hilbertiennes et s'immerge vraiment dans la *tâche du critique*, attentif d'abord (A–B) aux délicates expressions techniques (formes fondamentales de la créativité mathématique) et après (C) aux grandes forces qui s'y déploient : « unification des disciplines mathématiques » [93], « dualité de plans (...) entre la mathématique formalisée et l'étude métamathématique de ce formalisme » [130], « solidarité de structure entre les éléments d'un tout et le tout auquel ils appartiennent » [169], légitimation au même titre « de parler de l'existence de l'objet τA que de l'existence du point à l'infini en géométrie, des nombres imaginaires, ou des éléments idéaux d'un corps de nombres » [181], reconnaissance de l'espace de Hilbert (toujours nommé au singulier, avant l'axiomatisation générale de von Neumann) comme « mixte (...) homogène au continu par la nature et la topologie de ses éléments, et au discontinu par ses décompositions structurelles » [207], reconnaissance de la preuve Hilbert du principe de Dirichlet comme « mixte intermédiaire entre la structure du domaine et l'existence de la fonction » [213], place de l'espace de Hilbert pour étudier des processus d'évolution et propagation de grandeurs physiques en mécanique [286]. *Un continuel va-et-vient pendulaire entre l'analyse descriptive* (*A–B*) *et la synthèse explicative* (*C*) chiffre une des forces propres et caractéristiques du critique, au-delà de positions philosophiques qui préféreraient plutôt assumer une perspective catégorique ferme.

§ 4. — La critique des contemporains.

La liste des mathématiciens de son temps étudiés par Lautman est très indicative de son désir d'être à la pointe de la recherche : Ahlfors (2), Alexander (5), Alexandrov (5), Bernays (10), Bieberbach (5), Birkhoff (2), Caratheodory (2), Chevalley (5), Courant (5), Ehresmann (3), Fréchet (6), Glivenko (2), Gödel (9), Hasse (2), Hecke (6), Herbrand (17), Hopf (12), Lefschetz (3), Lukasiewicz (2), von Neumann (7), Takagi (4), Tarski (3), van der Waerden (5), Weil (2), Weyl (24) [(14)]. Deux noms dans la liste sont particulièrement importants pour Lautman : Hermann Weyl et Jacques Herbrand. Les deux cas sont des exemples forts de *passages* entre l'école de Hilbert et les mathématiques contemporaines où se situe Lautman. D'un côté, Weyl apporte à la compréhension de l'*espace* (via sa monographie sur les surfaces de Riemann (1913), citée 5 fois par Lautman) et des magnitudes *géométriques* (via l'analyse dimensionnelle continu-discret provenant des espaces de Hilbert). D'un autre côté, Herbrand apporte à la compréhension du *nombre* (via sa monographie sur la théorie des corps de nombres (1936), citée 1 fois) et, surtout, des magnitudes *arithmétiques* liées à sa théorie de la démonstration (via sa Thèse (1930), citée 5 fois). Ainsi, profitant de Weyl et Herbrand, Lautman obtient une bonne vision de la dialectique *espace-nombre*, toujours cruciale pour un entendement plein de la pensée mathématique.

Le cas Weyl est lié à des thèmes centraux de la mathématique moderne (1830-1930) : intuitionnisme [42], théorie des groupes [48, 83, 85-87, 117, 143-145, 193-194], surfaces de Riemann [85, 101-102, 135, 171-178, 188], topologie [113, 117, 121, 154, 188], analyse fonctionnelle [154, 206]. Le *critique* Lautman s'appuie sur (A) l'œuvre

(14) Les numéros entre parenthèses correspondent aux *nombres de pages* de l'édition espagnole [Lautman 2011] où les mathématiciens sont évoqués.

de Weyl pour (B) décrire des techniques géométriques en contrepoint avec l'algèbre abstraite, et déduire (C) une compréhension profonde des tiraillements modernes entre l'espace (l'« ange de la topologie », selon Weyl) et le nombre (le « diable de l'algèbre »). Les *descriptions très détaillées* de Lautman des travaux de Weyl sur la théorie des groupes et sur les surfaces de Riemann nous aident à *saisir* vraiment les techniques en jeu. Ce labeur (B) du critique — souvent mal comprise par les mathématiciens, les philosophes, les historiens — est très utile pour arriver à mieux comprendre la pensée mathématique. Souvent, le mathématicien même est incapable de (B) décrire ses créations, que l'historien ou le philosophe simplement (A) ne regardent pas. Le critique, *forcé* à conjoindre les étapes analytiques (A) et (B) pour arriver à l'explication synthétique (C), retourne par contre toute la situation, et développe une tâche *complémentaire* aux autres approches de la mathématique.

Le cas Herbrand est un des joyaux des *analyses-synthèses* réalisées par Lautman. Très proche à son ami, Lautman explique remarquablement la construction des *champs de Herbrand* dans sa théorie de la démonstration, à la suite des champs de Galois. Les deux génies précoces, Galois (19 ans) et Herbrand (22 ans), se rapprochent sous la vision du jeune critique (30 ans). Herbrand, disciple de Hilbert [43], construit sa méthode des champs pour assurer dans certains cas la non-contradiction d'une théorie [45–46] ; la théorie ne peut pas être trop « haute » (*e.g.* couvrir l'analyse), mais fonctionne pour des *strates bornés de l'arithmétique* ; ce qui résulte essentiel est la construction d'un « schématique intermédiaire, celui d'individus et de champs considérés non tant pour eux que pour les conséquences infinies que permettent les calculs finis opérés grâce à eux » [46]. Lautman présente le « théorème de Herbrand » comme profonde connexion *structurelle* sémantique-syntactique : « l'existence "en extension" d'un champ infini où non-P est réalisable est équivalente au fait structural que P ne fait pas partie de l'ensemble des propositions démontrables de la théorie » [186]. C'est « un cas pur de solidarité entre un ensemble d'opérations formelles définies par un système d'axiomes et l'existence d'un domaine où ces opérations soient réalisables » [180], ce qui répond à une conception créatrice fondamentale : « l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle créerait, l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine » [186]. La construction des champs de Herbrand est décrite minutieusement (indices, fonctions, itérations, croissance) [198–200] comme *mixte par excellence* (15) entre infinitude mathématique (valeurs individuelles) et finitude métamathématique (fonctions récursives avant la lettre). Ainsi, (A) s'immergeant dans une Thèse doctorale ardue, (B) décrivant les principaux mécanismes qui y émergent, et (C) réfléchissant sur la méthode, la combinatoire et la structuration de la théorie de la preuve proposées par Herbrand, Lautman accomplit la suprême et complexe tâche de la critique mathématique : *voir en détail et en profondeur pour nous faire mieux voir*.

§ 5. — Critique conjointe à la Philosophie.

Le labeur du philosophe s'étend sur un quatrième niveau de (D) réflexion conceptuelle, discours spéculatif et dialogue avec l'histoire de la philosophie. Lautman est un exemple magnifique de *conjonction* entre le critique (A–C) et le philosophe (D). Quelques-unes des conceptions fortes de Lautman (notions, Idées, mixtes, platonisme dynamique, mathématiques effectives) se situent dans ce niveau plus philosophique, mais toujours *en s'érigeant sur son profond travail critique*. Cependant, la situation est bien loin d'être la même avec d'autres « philosophes des mathématiques ». Bon nombre de situations divergentes peuvent arriver : (i) faibles ou nuls niveaux mathématiques (A–B), et forts (C–D) mais restreints à la logique, (ii) forts (A–B–C) mathématiques, dépourvus de (D) considérations philosophiques, (iii) forts (B–C–D), éloignés d'analyses des œuvres mathématiques originales, (iv) forts (A-B-C-D).

C'est comme *critique philosophe* — sans doute le majeur du 20e siècle — que Lautman mérite d'être évalué. Et c'est probablement à cause de cette différence avec la philosophie standard que les travaux du jeune penseur français, axés *critiquement* sur la *mathématique des strates* (*A-B*), n'ont pas été réellement compris par la soi-disant « philosophie des mathématiques », essentiellement anglo-saxonne, tournée entièrement vers la *logique des strates* (*C-D*).

(15) « Intermédiaires entre les signes et leurs valeurs, ces champs sont d'une part homogènes à la discontinuité finie des signes puisqu'à un signe de variable $(\exists y)$ ne correspond qu'une valeur a_i et, d'autre part, ils symbolisent une infinité de valeurs mathématiques puisque la lettre a_i représente n'importe quelle valeur mathématique éventuelle de la variable y lorsqu'elle intervient sous la forme particulière $\exists y$. Une médiation s'opère donc par ces champs du fini à l'infini, qui permet dans les cas traités par Herbrand de dominer l'infini et tel est le rôle que nous reconnaîtrons aux mixtes (...) » [200].

En effet, réaliser une critique philosophique de la mathématique est une tâche complètement différente de faire une philosophie de la logique. C'est *grâce* à sa vision critique et mathématique (A–B–C) que Lautman peut proposer ses idées philosophiques le plus originales : (1) la construction des *Idées* comme résolution partielles des *notions* (*e.g.,* l'Idée du continu cantorien comme résolution des notions de complétude et discrétion, mais aussi, réciproquement, l'Idée du continu brouwerien comme résolution *inverse* à la cantorienne, etc.), (2) le développement des *mixtes* comme force centrale de la créativité mathématique (*e.g.*, la théorie de Galois, l'uniformisation des surfaces de Riemann, les espaces de Hilbert, les champs de Herbrand, etc.), et (3) la compréhension d'un *platonisme dynamique comme va-et-vient itéré entre strates divers* de l'entendement (*e.g.*, *mathématiques effectives* particulières en contraposition avec les Idées générales).

Une matière mathématique riche et concrète (A), une analyse serrée de cette matière (B), une compréhension synthétique profonde des forces établies (C), et une réflexion philosophique *at large* (D) basée sur ces labeurs, constituent la spécificité et l'originalité de l'œuvre de Lautman. Nous devrions espérer que le *jeune critique philosophe français des mathématiques* s'érige en exemple de cette « pensée difficile », saluée par Bachelard, qui essaie de refléter et comprendre en profondeur l'invention mathématique.

§ — Bibliographie.

Œuvres d'Albert Lautman

[Lautman 1977] *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits* (ed. Maurice Loi), Paris : PUF (10/18), 1977.

[Lautman 2006] *Les mathématiques, les idées et le réel physique* (ed. Jacques Lautman), Paris : Vrin, 2006.

[Lautman 2010] « Rapport sur les travaux philosophiques entrepris par M. Lautman » (1935), dans [Marquis 2010], pp. 9-15.

[Lautman 2011] *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas* (trad. & ed. Fernando Zalamea), Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, 2011.

Études

[Hadamard 1943] **Jacques Hadamard**, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, New York Lectures, 1943 (publication anglaise, New York : Princeton University Press, 1945 ; traduction française augmentée, Paris : Albert Blanchard, 1959 ; réédition, Paris : Bordas, 1975).

[Grothendieck 1985-86] **Alexander Grothendieck**, *Récoltes et semailles*, manuscrit, 1252 pp.

[Labbé 2018] **Mickaël Labbé**, *La notion de travail chez Simone Weil*, Paris : Demopolis, 2018.

[Lafforgue 2014] **Laurent Lafforgue**, « Simone Weil et la mathématique », in : E. Gabellieri & F. L'Yvonnet (eds.), *Simone Weil — Cahiers de L'Herne*, Paris : Éditions de L'Herne, 2014, pp. 126-137.

[Marquis 2010] **Jean-Pierre Marquis** (ed.), *Albert Lautman, philosophe des mathématiques, Philosophiques* 37(1) 2010, Montréal.

[Poincaré 1908] **Henri Poincaré**, *L'invention mathématique*, Paris : Institut Général Psychologique, 1908.

[Zalamea 2019a] **Fernando Zalamea**, *Philosophie synthétique de la mathématique contemporaine* (trad. Charles Alunni), Paris : Hermann, 2019.

[Zalamea 2019b] —, *Grothendieck. Una guía a la obra matemática y filosófica*, Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, 2019.

[Zalamea 2021a] —, *Modelos en haces para el pensamiento matemático*, Bogotá : Universidad Nacional de Colombia, 2021.

[Zalamea 2021b] —, « Towards Mathematical Criticism », *Annals of Mathematics and Philosophy* 1 (2021), en cours de publication.

[Zalamea 2022] —, « Géométrie, topologie, Riemann, et les nuances vivantes de la pensée mathématique chez Bachelard (avec un contrepoint autour de Simone Weil) », *Bachelard Studies* (2022), en cours de publication.

Fernando Zalamea, Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá.